Institut für Angewandte Mathematik
Universität Bonn
Abt. Wissenschaftliches Rechnen und Numerische Simulation
Prof. Dr. M. Griebel, M. Arndt

Analysis I
Wintersemester 2000/2001
Aufgabenblatt 10

Ausgabe: Freitag, den 5. Januar 2001
Abgabe: Freitag, den 12. Januar 2001, 10:00-10:10

Aufgabe 43:
Sei $Y \subset X \subset \mathbb{R}$. Wir sagen, daß Y *dicht* in X liegt, falls in jeder ε-Umgebung jedes Punktes aus X ein Punkt aus Y liegt. Z.B. liegt $\mathbb{Q}$ dicht in $\mathbb{R}$.
Liege nun Y dicht in X und sei $f : Y \to \mathbb{R}$ stetig.
a) Zeige, daß es höchstens eine stetige Fortsetzung von f auf X gibt, d.h. höchstens eine stetige Funktion $g : X \to \mathbb{R}$ mit $g|_Y = f$. (2 Punkte)
b) Gibt es immer eine stetige Fortsetzung von f auf X? (1 Punkt)

Aufgabe 44:
Bestimme alle stetigen Funktionen f, g und h, die den Funktionalgleichungen

$$\begin{array}{lll} f: & \mathbb{R} \to \mathbb{R}, & f(x+y) = f(x) + f(y) \\ g: & \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, & g(xy) = g(x) + g(y) \\ h: & \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, & h(xy) = h(x)h(y) \end{array}$$

für alle x, y aus dem Definitionsbereich genügen. (4 Punkte)
Freiwillige Zusatzfrage: Wie sieht f aus, wenn die Voraussetzung der Stetigkeit entfällt? (Hinweis: $\mathbb{R}$ ist ein $\mathbb{Q}$-Vektorraum.)

Aufgabe 45:
(Periodizitäten des Sinus und Cosinus)
a) Zeige durch Abschätzung der Reihenentwicklung und mit Hilfe des Zwischenwertsatzes, daß der Cosinus im Intervall $[0, 2]$ eine Nullstelle hat.
b) Zeige, daß es eine kleinste positive Nullstelle des Cosinus gibt.
Definition: Die kleinste positive Nullstelle des Cosinus heißt $\frac{1}{2}\pi$.
c) Zeige $\sin \frac{\pi}{2} = 1$.
d) Zeige $\cos \pi = -1$, $\sin \pi = 0$.
e) Zeige $\cos 2\pi = 1$, $\sin 2\pi = 0$.
f) Zeige, daß der Sinus und der Cosinus 2π-*periodisch* sind, d.h.

$$\forall x \in \mathbb{R} : \quad \cos(x + 2\pi) = \cos x, \quad \sin(x + 2\pi) = \sin x.$$

(4 Punkte)

Aufgabe 46:
Stelle die Werte von $\sin x$ und $\cos x$ an den Stellen

$$x = \frac{\pi}{12}, \ \frac{\pi}{8}, \ \frac{\pi}{6}, \ \frac{\pi}{4}, \ \frac{\pi}{3}.$$

durch Ausdrücke aus rationalen Zahlen und Quadratwurzeln dar. (3 Punkte)

Aufgabe 47:
(Banachscher Fixpunktsatz)
Sei $X \subset \mathbb{R}$. Eine Abbildung $f : X \to X$ heißt *kontrahierend*, falls

$$\exists\, \alpha \in [0, 1) \quad \forall x, y \in X : \quad |f(x) - f(y)| \leq \alpha |x - y|.$$

Sei nun $X \subset \mathbb{R}$ abgeschlossen und $f : X \to X$ kontrahierend. Bilde zu $x_0 \in X$ die Folge $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ vermöge der Rekursionsvorschrift

$$x_{i+1} := f(x_i).$$

a) Zeige, daß $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ gegen eine Lösung $\xi \in X$ der Fixpunktgleichung

$$\xi = f(\xi)$$

konvergiert. Zeige, daß die Fixpunktgleichung genau eine Lösung besitzt.
b) Zeige die *a priori*-Fehlerabschätzung

$$|\xi - x_i| \leq \frac{\alpha^i}{1-\alpha}|x_1 - x_0|.$$

c) Zeige die *a posteriori*-Fehlerabschätzung

$$|\xi - x_i| \leq \frac{\alpha}{1-\alpha}|x_i - x_{i-1}|.$$

d) Wozu lassen sich die beiden Fehlerabschätzungen verwenden, was sind ihre Vor- und Nachteile?
(4 Punkte)

Programmieraufgabe 3:
(Iterative Verfahren zur Fixpunkt- und Nullstellenbestimmung)
a) Zur Bestimmung eines Fixpunktes einer stetigen Funktion $f : X \to X$, $X \subset \mathbb{R}$ kann folgendes iterative Verfahren verwendet werden:

$$\text{Wähle } x_0 \in X, \qquad x_{i+1} := f(x_i).$$

Unter geeigneten Voraussetzungen konvergiert die Folge $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$, vgl. dazu z.B. Aufgabe 47. Implementiere das Fixpunktverfahren und teste es an der Funktion

$$f(x) = \exp\left(\frac{-x}{2}\right).$$

Für den Startwert $x_0 = 0.8$ liegen alle Folgenglieder im Intervall $[x_1, x_0] \approx [0.67; 0.8]$, und f ist auf diesem Intervall kontrahierend mit der Kontraktionskonstante $\alpha = |f'(x_1)| \approx 0.358$ (warum?). Berechne für jede Iterierte die *a priori*- und *a posteriori*-Fehlerabschätzungen aus Aufgabe 47 und vergleiche sie mit dem wirklichen Fehler (exakte Lösung ist 0.7034674224 9839165204 ...). Bestimme mit Hilfe der Fehlerabschätzungen, wieviele Iterationen nötig sind, um eine Genauigkeit von 10^{-10} zu erreichen.
b) Zur Bestimmung einer Nullstelle einer differenzierbaren Funktion f kann das Newtonverfahren verwendet werden:

$$\text{Wähle } x_0 \in X, \qquad x_{i+1} := x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}.$$

Auch dieses konvergiert unter geeigneten Voraussetzungen, was auf dem nächsten Aufgabenblatt untersucht werden wird. Anschaulich kann man sich das Verfahren so vorstellen: Der neue Wert x_{i+1} ist der Schnittpunkt von der x-Achse und der Tangente an f im Punkt $f(x_i)$, d.h. f wird durch eine affin lineare Funktion approximiert und die Nullstelle der Approximation bestimmt. Implementiere und teste das Newtonverfahren an der Funktion

$$f(x) = x^2 - 2$$

mit verschiedenen Startwerten. Vgl. dazu Aufgabe 12 von Aufgabenblatt 3. Was läßt sich über die Konvergenzgeschwindigkeit in der Nähe der Lösung sagen? (10 Punkte)

Vorstellung der Lösungen:
Zeit: In der Woche vom 15.1. bis 19.1.2001, genauer Termin nach Vereinbarung.
Ort: CIP-Pool, Wegelerstr. 6, Zimmer 114.
Die Bearbeitung erfolgt (wie gehabt) mit Maple oder einem anderen Computeralgebrasystem. Die Programmieraufgabe kann in Gruppen von bis zu drei Studenten bearbeitet und vorgestellt werden.

Die Aufgabenblätter sind auch unter http://wissrech.iam.uni-bonn.de/lehre/Analysis1_WS00 verfügbar.