INSTITUT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK
Universität Bonn
Abt. Wissenschaftliches Rechnen und Numerische Simulation
Prof. Dr. M. Griebel, M. Arndt

Analysis I
Wintersemester 2000/2001
Aufgabenblatt 9

Ausgabe: Freitag, den 15. Dezember 2000
Abgabe: Freitag, den 5. Januar 2001, 10:00-10:10

Aufgabe 38:
a) Zeige, daß eine Menge $A \subset \mathbb{R}$ genau dann abgeschlossen ist, wenn ihr Komplement $\mathbb{R}\backslash A$ offen ist. (2 Punkte)
b) Zeige, daß der Durchschnitt endlich vieler offener Mengen offen und die Vereinigung beliebig vieler offener Mengen offen ist. Formuliere und beweise entsprechende Aussagen für abgeschlossene und kompakte Mengen. (2 Punkte)
c) Zeige durch Gegenbeispiele, daß die Voraussetzung der Endlichkeit in allen drei Fällen erforderlich ist. (2 Punkte)

Aufgabe 39:
Finde Funktionenfolgen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die gleichmäßig gegen Funktionen f bzw. g konvergieren, d.h. $f_n \rightrightarrows f$ und $g_n \rightrightarrows g$, für die aber nicht $f_n g_n \rightrightarrows fg$ gilt. (4 Punkte)

Aufgabe 40:
Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Untersuche die Folgen

$$f_n(x) := \frac{[nf(x)]}{n} \quad \text{und} \quad g_n(x) := f\left(\frac{[nx]}{n}\right)$$

auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz gegen f, falls
a) f beliebig ist,
b) f stetig ist und
c) f gleichmäßig stetig ist. (4 Punkte)

Aufgabe 41:
a) Untersuche die Funktionen

$$f_n(x) = \frac{|x|^n}{1+|x|^n} \quad \text{und} \quad g_n(x) = \frac{nx}{1+n|x|}$$

auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz und bestimme ggf. die Grenzfunktion. (2 Punkte)
b) Berechne die Normen $\|f_n\|_{\mathbb{R}}$ und $\|g_n\|_{\mathbb{R}}$. (1 Punkt)
c) Bestimme den Definitionsbereich und untersuche auf stetige Fortsetzbarkeit:

$$f(x) = \exp\left(\frac{-1}{x^2}\right)$$

(1 Punkt)

Aufgabe 42:
Wir sagen, daß eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die *Zwischenwerteigenschaft* hat, falls es für alle $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \leq b$ und $y \in [\min(f(a), f(b)), \max(f(a), f(b))]$ ein $x \in [a, b]$ mit $f(x) = y$ gibt.
Zeige, daß jede monotone Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die die Zwischenwerteigenschaft besitzt, stetig ist. Gilt das auch für nichtmonotone Funktionen? (4 Punkte)

Die Aufgabenblätter sind auch unter http://wissrech.iam.uni-bonn.de/lehre/Analysis1_WS00 verfügbar.