Institut für Angewandte Mathematik
Universität Bonn
Abt. Wissenschaftliches Rechnen und Numerische Simulation
Prof. Dr. M. Griebel, M. Arndt

Analysis I
Wintersemester 2000/2001
Aufgabenblatt 8

Ausgabe: Freitag, den 8. Dezember 2000
Abgabe: Freitag, den 15. Dezember 2000, 10:00-10:10

Aufgabe 33:
Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig in 0, außerdem gelte

$$f(0) = 1 \quad \text{und} \quad f(x+y) \leq f(x)f(y)$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}$. Zeige, daß f stetig auf $\mathbb{R}$ ist. (4 Punkte)

Aufgabe 34:
a) Skizziere und untersuche auf Stetigkeit:

$$\begin{aligned} f(x) &= x - [x] \\ g(x) &= (x - [x])(x - [x] - 1) \\ h(x) &= \left(x - \frac{[x]}{2}\right)\left(x - \frac{[x]+1}{2}\right) \end{aligned}$$

(3 Punkte)

b) Bestimme den Definitionsbereich und untersuche auf stetige Fortsetzbarkeit:

$$f(x) = \frac{7x^4 + 12x^3 - 4x^2 + 4x + 8}{x^3 + 3x + 14}$$

(1 Punkt)

Aufgabe 35:
Zeige, daß $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} (\min\{n \in \mathbb{N} : nx \in \mathbb{Z}\})^{-1} & \text{falls } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

stetig auf $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ und unstetig auf $\mathbb{Q}$ ist. (4 Punkte)

Aufgabe 36:
Beweise Satz 3.8 der Vorlesung: Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ streng monoton und stetig. Dann existiert die Umkehrfunktion $g : [f(a), f(b)] \to \mathbb{R}$ bzw. $g : [f(b), f(a)] \to \mathbb{R}$, und sie ist stetig. (3 Punkte)

Aufgabe 37:
a) Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine monotone Funktion. Zeige, daß die Menge der Unstetigkeitsstellen von f höchstens abzählbar unendlich ist. (4 Punkte)
b) Stimmt die Aussage auch für monotone Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$? (2 Punkte)
Hinweis: Falls f monoton wächst, betrachte die Mengen

$$U_n := \left\{ x \in (a, b) : \left| \inf_{s>x}\{f(s)\} - \sup_{s<x}\{f(s)\} \right| \geq \frac{1}{n} \right\}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Die Aufgabenblätter sind auch unter http://wissrech.iam.uni-bonn.de/lehre/Analysis1_WS00 verfügbar.