INSTITUT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK
Universität Bonn
Abt. Wissenschaftliches Rechnen und Numerische Simulation
Prof. Dr. M. Griebel, M. Arndt

Analysis I
Wintersemester 2000/2001
Aufgabenblatt 7

Ausgabe: Freitag, den 1. Dezember 2000
Abgabe: Freitag, den 8. Dezember 2000, 10:00-10:10

Aufgabe 29:
a) *(Vertauschung von Grenzprozessen)* Sei $(a_{\nu\mu})_{\nu,\mu\in\mathbb{N}}$ ein Tableau reeller Zahlen. Für jedes $\nu \in \mathbb{N}$ existiere der Grenzwert $\lim_{\mu\to\infty} a_{\nu\mu}$, und die Reihen $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_{\nu\mu}$ mögen gleichmäßig in μ konvergieren, d.h. zu jedem $\varepsilon > 0$ gebe es ein n_0, so daß für alle μ und $n \geq n_0$ gilt: $|\sum_{\nu=n}^{\infty} a_{\nu\mu}| < \varepsilon$. ("Gleichmäßig in μ" bedeutet hier also, daß n_0 unabhängig von μ ist.) Zeige, daß dann

$$\lim_{\mu\to\infty} \sum_{\nu=1}^{\infty} a_{\nu\mu} \qquad \text{und} \qquad \sum_{\nu=1}^{\infty} \lim_{\mu\to\infty} a_{\nu\mu}$$

existieren und gleich sind. (4 Punkte)
b) Bleibt die Aussage richtig, wenn die Reihen $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_{\nu\mu}$ nur einzeln für sich konvergieren, aber nicht mehr gleichmäßig in μ? (Beweis bzw. Gegenbeispiel) (2 Punkte)

Aufgabe 30:
a) Zeige, daß der Konvergenzradius der Exponentialfunktion

$$\exp(x) := \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!}$$

∞ ist, d.h. daß die Potenzreihe für jedes $x \in \mathbb{R}$ konvergiert. (2 Punkte)
b) Zeige

$$\exp(x) = \lim_{j\to\infty} \left(1 + \frac{x}{j}\right)^j .$$

(4 Punkte)
Hinweis: Binomischer Lehrsatz und Aufgabe 29.

Aufgabe 31:
a) Sei $P(x) := \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ eine Potenzreihe. Zeige, daß der Konvergenzradius R von P gegeben ist durch

$$R = \frac{1}{\limsup\limits_{i\to\infty} \sqrt[i]{|a_i|}}.$$

Wie ist dieser Ausdruck zu interpretieren, wenn der Limes superior die Werte 0 oder ∞ annimmt, und wie sieht dann das Konvergenzverhalten aus? (2 Punkte)
b) Zeige, daß der Konvergenzradius ebenfalls gegeben ist durch

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{i\to\infty} \left|\frac{a_{i+1}}{a_i}\right|},$$

falls der Grenzwert existiert. (2 Punkte)
Das erste Kriterium geht auf *Augustin Louis Cauchy* (1789-1857) und *Jacques Hadamard* (1865-1963) zurück, das zweite auf *Leonhard Euler* (1707-1783).

Aufgabe 32:
(Konvergenzverbesserung) Sei $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ eine konvergente Reihe. In vielen Fällen läßt sich die Konvergenzgeschwindigkeit erhöhen, indem man stattdessen die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ mit

$$b_0 := \frac{1}{2} a_1, \qquad b_k := \frac{1}{2}(a_k + a_{k+1}) \quad \text{für } k \geq 1$$

betrachtet.
a) Zeige: Falls $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergiert, so auch $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$, und zwar gegen dieselbe Summe. (1 Punkt)
b) Betrachte die alternierende harmonische Reihe, d.h.

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \quad \text{mit} \quad a_k = (-1)^{k+1} \frac{1}{k}.$$

Leite eine möglichst gute Abschätzung für die Absolutwerte der Restglieder

$$R_n^a := \sum_{k=n}^{\infty} a_k, \qquad R_n^b := \sum_{k=n}^{\infty} b_k$$

her. Was läßt sich daran im Hinblick auf die Konvergenzgeschwindigkeit der beiden Reihen ablesen? (3 Punkte)

Programmieraufgabe 2:
a) Aufgabe 30 bietet eine Darstellung der Exponentialfunktion als Folge, alternativ zur Definition mittels einer Potenzreihe. Berechne für verschiedene $x \in \mathbb{R}$ die ersten 20 Partialsummen bzw. Folgenglieder und die Abweichungen vom Grenzwert $\exp(x)$ und stelle diese in Tabellenform dar. Was läßt sich über die Konvergenzgeschwindigkeit aussagen?
b) Stelle die Exponentialfunktion sowie einige Partialsummen und Folgenglieder in Abhängigkeit von $x \in [-2; 2]$ graphisch dar.
c) Berechne die Summe der alternierenden harmonischen Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k}.$$

d) Führe Teilaufgabe a) sinngemäß für die beiden Reihen aus Aufgabe 32 b) durch. (10 Punkte)

Vorstellung der Lösungen:
Zeit: In der Woche vom 11.12. bis 15.12.2000, genauer Termin nach Vereinbarung.
Ort: CIP-Pool, Wegelerstr. 6, Zimmer 114.
Die Bearbeitung erfolgt (wie gehabt) mit Maple oder einem anderen Computeralgebrasystem. Die Programmieraufgabe kann in Gruppen von bis zu drei Studenten bearbeitet und vorgestellt werden.

Die Aufgabenblätter sind auch unter http://wissrech.iam.uni-bonn.de/lehre/Analysis1_WS00 verfügbar.