Institut für Angewandte Mathematik
Universität Bonn
Abt. Wissenschaftliches Rechnen und Numerische Simulation
Prof. Dr. M. Griebel, M. Arndt

Analysis I
Wintersemester 2000/2001
Aufgabenblatt 6

Ausgabe: Freitag, den 24. November 2000
Abgabe: Freitag, den 1. Dezember 2000, 10:00-10:15

Aufgabe 24:
a) *(Riemannscher Umordnungssatz)* Sei $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ eine konvergente, aber nicht absolut konvergente Reihe. Zeige, daß es zu jedem $b \in \mathbb{R}$ eine Umordnung der Reihe gibt, die gegen b konvergiert, d.h. daß es eine bijektive Abbildung $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $\sum_{i=1}^{\infty} a_{\sigma(i)} = b$ gibt. (4 Punkte)
b) Zeige, daß es Umordnungen der Reihe gibt, die bestimmt gegen $+\infty$ und $-\infty$ divergieren. (1 Punkt)
c) Finde eine Umordnung der alternierenden harmonischen Reihe, die bestimmt gegen $+\infty$ divergiert. (1 Punkt)

Aufgabe 25:
Entferne aus der harmonischen Reihe alle Summanden $\frac{1}{n}$, bei denen n die Ziffer 4 in der Dezimaldarstellung enthält. Zeige, daß die Reihe der restlichen Summanden konvergiert. (3 Punkte)

Aufgabe 26:
Untersuche die folgenden Reihen auf Konvergenz, absolute Konvergenz, Divergenz und bestimmte Divergenz. Berechne ggf. ihre Summe.

a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^k}$

b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2-1}$

c) $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$

d) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^{3k+1}}{3^{3k+2}}$

e) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt[k]{k}}$

(je 1 Punkt)

Aufgabe 27:
Untersuche auf Konvergenz, absolute Konvergenz, Divergenz und bestimmte Divergenz:

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{k^k}$

b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left(-1-\frac{1}{k}\right)^k}{k}$

c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} k^{\alpha}$ für $\alpha < -1$

d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} k^{\alpha}$ für $\alpha \geq -1$

(je 1 Punkt)

Aufgabe 28:
Finde eine absolut konvergente Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ mit

$$\limsup_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \infty.$$

Was bedeutet dies für das Quotientenkriterium? (2 Punkte)

Die Aufgabenblätter sind auch unter http://wissrech.iam.uni-bonn.de/lehre/Analysis1_WS00 verfügbar.