INSTITUT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK
Universität Bonn
Abt. Wissenschaftliches Rechnen und Numerische Simulation
Prof. Dr. M. Griebel, M. Arndt

Analysis I
Wintersemester 2000/2001
Aufgabenblatt 5

Ausgabe: Freitag, den 17. November 2000
Abgabe: Freitag, den 24. November 2000, 10:00-10:15

Aufgabe 19:
Zeige, daß das Produkt einer Nullfolge und einer beschränkten Folge eine Nullfolge ist. (2 Punkte)

Aufgabe 20:
a) Beweise Satz 2.5 der Vorlesung: Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergente Folgen mit $\lim a_n = \lim b_n = a$. Sei $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine weitere Folge, zu der es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $a_n \le c_n \le b_n$ für alle $n \ge n_0$ gebe. Dann ist auch c_n konvergent, und es gilt $\lim c_n = a$. (2 Punkte)
b) Beweise Satz 2.6 der Vorlesung: Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge. Es gebe Konstanten $A, B \in \mathbb{R}$ mit $A \le a_n \le B$. Dann gilt $A \le \lim a_n \le B$. (1 Punkt)

Aufgabe 21:
a) Zeige die *Bernoullische Ungleichung*: Für $n \in \mathbb{N}$ und $x \in \mathbb{R}$ mit $x > -1$ gilt

$$(1+x)^n \ge 1 + nx. \qquad \text{(2 Punkte)}$$

b) Zeige, daß

$$\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \middle| \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \right)_{n\in\mathbb{N}}$$

eine Intervallschachtelung ist. Dabei ist die Bernoullische Ungleichung hilfreich. (3 Punkte)
Bemerkung: Die dadurch festgelegte reelle Zahl ist die Konstante $e \approx 2.718281828459$.

Aufgabe 22:
Setze

$$a_0 := 1, \qquad a_{n+1} := \frac{a_n + 2}{a_n + 1}.$$

a) Zeige, daß $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge ist. (2 Punkte)
b) Zeige, daß der Grenzwert $a := \lim a_n$ die zugehörige Fixpunktgleichung erfüllt und bestimme seinen Wert. (2 Punkte)

Aufgabe 23:
Sei $M \subset \mathbb{R}$ beschränkt. Aufgrund der Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ besitzt M eine größte untere und eine kleinste obere Schranke (in $\mathbb{R}$, nicht notwendigerweise in M!), wir nennen sie *Infimum* und *Supremum* von M, i.Z. $\inf M$ und $\sup M$. Für eine beschränkte Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definieren wir den *Limes inferior* und den *Limes superior* vermöge

$$\liminf_{n\to\infty} a_n := \lim_{n\to\infty} \left(\inf \{a_i | i \ge n\}\right)$$

$$\limsup_{n\to\infty} a_n := \lim_{n\to\infty} \left(\sup \{a_i | i \ge n\}\right)$$

Anstelle von lim inf und lim sup schreibt man auch oft $\underline{\lim}$ und $\overline{\lim}$.
a) Zeige, daß der Limes inferior und der Limes superior *wohldefiniert* sind, d.h. daß die Grenzwerte auf der rechten Seite existieren. (2 Punkte)

b) Zeige, daß für eine beschränkte Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und beliebiges $\varepsilon > 0$ gilt:

$$\begin{aligned}
a_m &< \liminf_{n\to\infty} a_n + \varepsilon && \text{für unendlich viele } m,\\
a_m &> \liminf_{n\to\infty} a_n - \varepsilon && \text{für fast alle } m,\\
a_m &> \limsup_{n\to\infty} a_n - \varepsilon && \text{für unendlich viele } m,\\
a_m &< \limsup_{n\to\infty} a_n + \varepsilon && \text{für fast alle } m.
\end{aligned}$$

(2 Punkte)

c) Zeige, daß eine beschränkte Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ genau dann konvergiert, wenn gilt:

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n.$$

(2 Punkte)

d) Zeige, daß für beschränkte Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gilt:

$$\underline{\lim}\, a_n + \underline{\lim}\, b_n \le \underline{\lim}\, (a_n + b_n) \le \underline{\lim}\, a_n + \overline{\lim}\, b_n \le \overline{\lim}\, (a_n + b_n) \le \overline{\lim}\, a_n + \overline{\lim}\, b_n.$$

(2 Punkte)

e) Finde zwei beschränkte Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, für die alle Ungleichungen aus d) strikt sind, d.h. daß anstelle von $\le$ sogar $<$ gilt. (2 Punkte)

Hinweis: Läßt man die Symbole $\pm\infty$ zu, so lassen sich die Definitionen des Infimums, des Supremums, des Limes inferior und des Limes superior auch auf unbeschränkte Mengen bzw. Folgen ausdehnen.

Die Aufgabenblätter sind auch unter http://wissrech.iam.uni-bonn.de/lehre/Analysis1_WS00 verfügbar.