Institut für Angewandte Mathematik
Universität Bonn
Abt. Wissenschaftliches Rechnen und Numerische Simulation
Prof. Dr. M. Griebel, M. Arndt

Analysis I
Wintersemester 2000/2001
Aufgabenblatt 4

Ausgabe: Freitag, den 10. November 2000
Abgabe: Freitag, den 17. November 2000, 10:00-10:15

Aufgabe 15:
Sei K ein Körper. Auf $K \times K$ definieren wir Verknüpfungen

$$\begin{aligned} \oplus &: (K \times K) \times (K \times K) \to K \times K, & (a,b) \oplus (c,d) &:= (a+c, b+d), \\ \odot &: (K \times K) \times (K \times K) \to K \times K, & (a,b) \odot (c,d) &:= (ac - bd, ad + bc). \end{aligned}$$

a) Zeige, daß $K \times K$ mit diesen Verknüpfungen genau dann ein Körper ist, wenn gilt:

$$\forall a, b \in K: \quad a^2 + b^2 = 0 \;\Rightarrow\; (a = 0 \wedge b = 0).$$

Zeige, daß insbesondere $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ein Körper ist; wir bezeichnen ihn als *Körper der komplexen Zahlen* $\mathbb{C}$ und schreiben $a + bi$ anstelle von (a, b). (4 Punkte)
b) Ergibt sich ein Körper für $K = \mathbb{Q}$, $K = \mathbb{C}$, $K = \mathbb{F}_2$ bzw. $K = \mathbb{F}_3$, wobei $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ den Primkörper der Charakteristik p bezeichnet (p prim)? (2 Punkte)
Hinweis: Vgl. die Bemerkung von Aufgabe 1 auf Übungsblatt 3 der Linearen Algebra.
c) Zeige, daß $\mathbb{C}$ nicht angeordnet weden kann. (2 Punkte)
d) Zeige, daß kein endlicher Körper angeordnet werden kann. (2 Punkte)

Aufgabe 16:
Untersuche, ob die folgenden Folgen konvergent oder divergent sind. Falls konvergent, bestimme ihren Grenzwert. Falls divergent, untersuche, ob sie bestimmt divergent gegen ∞ sind.

a) $$a_n := \frac{n^2 - 1}{3n^2 + 1}$$

b) $$a_n := \frac{2\sqrt{n^4 - 1}}{5n^3 - \sqrt{n} + 99}$$

c) $$a_n := \sqrt[n]{n!}$$

d) $$a_n := \binom{n}{k} \frac{1}{2^n}$$

(je 1 Punkt)

Aufgabe 17:
Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine konvergente Folge mit Grenzwert $a \in \mathbb{R}$. Untersuche die Folge $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit

$$b_n := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} a_i$$

auf Konvergenz und bestimme ggf. den Grenzwert. (3 Punkte)

Aufgabe 18:
Seien $a_1, b_1 \in \mathbb{R}$ mit $0 \le a_1 \le b_1$. Betrachte die Folgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$, wobei

$$a_{n+1} := \sqrt{a_n b_n}, \qquad b_{n+1} := \frac{1}{2}(a_n + b_n).$$

Zeige, daß beide Folgen gegen denselben Grenzwert konvergieren. (3 Punkte)

Programmieraufgabe 1:
Ein einfaches Modell zur Populationsentwicklung in einem biologischen System ist gegeben durch die Folge

$$p_{n+1} := kp_n \frac{1000 - p_n}{1000},$$

wobei p_n die Zahl der Individuen in der n-ten Generation beschreibt, als Startwert wird p_0 festgelegt. k ist eine Konstante, die die Vermehrungsrate modelliert.
Das Modell kann folgendermaßen interpretiert werden: Für kleine Populationen ist die Vermehrungsrate etwa proportional zur Population ($p_{n+1} \approx kp_n$), bei hoher Population fühlen die Individuen sich nicht mehr so wohl und die Vermehrungsrate sinkt, was durch den zusätzlichen Faktor $(1000 - p_n)/1000$ modelliert wird. Für große p_n ist die Population sogar rückläufig.
a) Implementiere dieses Modell in Maple.
b) Teste das Modell für verschiedene Startwerte $p_0 \in [0; 1000]$ und Konstanten $k \in [1; 3]$. Berechne mindestens 100 Schritte und stelle die Ergebnisse graphisch dar. Wie entwickelt sich die Population? Wie ist die Abhängigkeit der Ergebnisse von p_0 und k?
b) Wie verhält sich das System für $k \in [3; 3.4]$?
c) Wie verhält sich das System für $k \in [3.6; 4]$? (Ein solches Verhalten ist bei Insektenpopulationen tatsächlich beobachtet worden.) (10 Punkte)

Vorstellung der Lösungen:
Zeit: In der Woche vom 27.11. bis 1.12.2000, genauer Termin nach Vereinbarung.
Ort: CIP-Pool, Wegelerstr. 6, Zimmer 114.
Die Programmieraufgaben müssen einzeln bearbeitet und vorgestellt werden.
Der Start von Maple im CIP-Pool erfolgt mit dem Kommando `xmaple`.

Einführung in Maple:
Rüdiger Braun, Reinhold Meise: *Analysis mit Maple.* Verlag Vieweg, 1995.

Die Aufgabenblätter sind auch unter http://wissrech.iam.uni-bonn.de/lehre/Analysis1_WS00 verfügbar.